Comparação dos métodos numéricos na solução De problemas da fluidodinâmica computacional

Comparison of numerical methods in the solution Of computational fluidodynamics problems

DOI: 10.46814/lajdv2n6-020

Recebimento dos originais: 01/09/2020

Aceitação para publicação: 30/10/2020

Willis Alcantara Manzan Júnior

Formação acadêmica mais alta: Pós Graduação

Instituição de atuação atual: SANEAGO S.A. - SANEAMENTO DE GOIÁS

Endereço completo (residencial): Avenida Dona Maria Cardoso, Qd. 123, Lt. 14 a 21, Ap. 404-A,

Ed. Plaza de Espana, Parque Amazônia, Goiânia, Goiás

E-mail: willismanzan@gmail.com

Felipe Pamplona Mariano

Formação acadêmica mais alta: Doutorado

Instituição de atuação atual: Universidade Federal de Goiás

Endereço completo (profissional): Av. Universitária, 1488, 3º piso, Setor Leste Universitário,
Goiânia-GO

E-mail: fpamplonamariano@gmail.com

RESUMO

O presente trabalho tem como propósito apresentar uma comparação entre dois métodos numéricos: o Método de Diferenças Finitas (MDF) e o Método Espectral de Fourier (MEFo). Ambos os métodos são utilizados para resolver a equação de Burgers, a qual é uma equação diferencial parcial (EDP), que modela a difusão e a advecção de uma dada propriedade física, é uma equação importante na hierarquia dos problemas de Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD). Também é estudada a influência de dois métodos numéricos clássicos de avanço temporal, o Método de Euler (ME) e o Método de Runge-Kutta (MRK) de quarta ordem. Como resultado constatou-se que é importante adequar a discretização espacial com a temporal, de forma que se tenha uma solução numérica acurada e com eficiência computacional.

Palavras-chave: Fluidodinâmica Computacional, Método espectral de Fourier, Método de Diferenças Finitas, Método de Runge-Kutta, Método de Euler.

ABSTRACT

The present work aims to present a comparison between two numerical methods: the Finite Difference Method (MDF) and the Spectral Fourier Method (MEFo). Both methods are used to solve the Burgers equation, which is a partial differential equation (EDP), which models the diffusion and advection of a given physical property, is an important equation in the hierarchy of Computational Fluid Dynamics problems (CFD). The influence of two classic numerical methods of time advance is also studied, the Euler Method (ME) and the fourth order Runge-Kutta Method (MRK). As a result, it was found that it is important to adapt the spatial discretization with the temporal one, in order to have an accurate numerical solution and with computational efficiency.

Keywords: Computational Fluid Dynamics, Fourier spectral method, Finite Difference Method, Runge-Kutta Method, Euler Method.

1 INTRODUÇÃO

A Dinâmica dos Fluidos trata-se de uma área do conhecimento pertencente à Mecânica dos Fluidos e esta, por sua vez, é estudada pelas Engenharias, como a Engenharia Química e a Engenharia Mecânica. Em se tratando da Mecânica dos Fluidos, como um todo existem duas abordagens fundamentais no projeto e na análise de sistemas de engenharia que envolvem o escoamento de fluidos, que são os procedimentos experimentais e os cálculos (Çengel & Cimbala, 2007).

Os métodos experimentais têm a característica de se utilizar instrumentos de medidas e técnicas avançadas de visualização, envolve a construção de modelos, testados em túneis de vento ou em outras instalações, em certas circunstâncias podem ser vantajosos, em outras não.

Já a abordagem do cálculo envolve a solução de equações diferenciais, seja analítica ou numericamente (computacionalmente). Estes tentam modelar matematicamente os fenômenos físicos envolvidos nos escoamentos dos fluidos da maneira mais real possível.

Os métodos analíticos apresentam a característica de se fazer simplificações nas equações. Entretanto, é através dos métodos numéricos que se consegue calcular e obter resultados que não se obteriam com a análise analítica, além do mais, em alguns problemas a obtenção de uma solução analítica torna-se inviável ou até mesmo impossível. A Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD), portanto, dedica-se a análise dos escoamentos dos fluidos por meio da solução numérica das EDP's.

Na prática aplicam-se as análises experimentais e de CFD e as duas se complementam, *e.g.*, pode-se obter propriedades globais, tais como, queda de pressão, coeficiente de arrasto e elevação de forma experimental, mas para se obter detalhes do campo de pressão do escoamento, perfis de velocidade, tensão de cisalhamento usa-se CFD (Çengel & Cimbala, 2007). Além disso, os dados experimentais são muito usados para validar as soluções de CFD, comparando as quantidades globais determinadas pelos métodos computacional e experimental (Çengel & Cimbala, 2007). Além disso, CFD também é empregado para diminuir o ciclo de projeto, através de estudos paramétricos cuidadosamente controlados, reduzindo assim a quantidade necessária de testes experimentais (Çengel & Cimbala, 2007).

A resolução numérica das equações de Navier-Stokes é a base para a Mecânica dos Fluidos Computacional (CFD). Elas são EDP's, não-lineares, que modelam matematicamente o comportamento dinâmico dos fluidos. Existem várias formas de resolver numericamente essas

equações. Dentre elas podem ser citados os métodos das diferenças finitas, volumes finitos, elementos finitos, métodos espectrais, etc. Dependendo do tipo do escoamento que se queira resolver, um desses métodos adequam-se melhor que outro (Mariano, 2007).

No presente trabalho serão analisados dois métodos numéricos de discretização espacial: o Método de Diferenças Finitas (MDF) e o Método Espectral de Fourier (MEFo), para resolver a EDP conhecida como equação de Burgers (Canuto et al., 2006). Quanto a discretização temporal também são apresentados dois métodos clássicos o de Euler (ME) e o de Runge-Kutta (MRK). São feitas três combinações: MDF+ME, MEFo+ME e MEFo+MRK.

2 METODOLOGIA

2.1 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

O primeiro método a ser apresentado trata-se do Método de Diferenças Finitas que utiliza aproximações discretas das derivadas presentes nas EDP's. Para se resolver uma EDP de forma numérica é preciso encontrar para os termos que nela aparecem nas respectivas expressões escritas em função de pontos de malha (Fortuna, 2000) como pode ser visto na Fig. (1). Essas expressões são denominadas de aproximação por diferenças finitas. O resultado final desse processo é uma equação algébrica denominada de diferenças finitas (EDF), que é escrita para cada ponto da região discretizada em que se deseja calcular a solução do problema (Fortuna, 2000).

Figura 1. Região contínua e região discretizada.

2.2 MÉTODO ESPECTRAL DE FOURIER

Os Métodos Espectrais consistem numa transformação do espaço físico para o espaço espectral. Os Métodos Espectrais caracterizam-se por expandir as soluções em termos de uma série truncada de funções de aproximação globais (séries de Fourier, séries de polinômios de Chebyshev ou Legendre) das variáveis independentes. O Método Espectral de Fourier, assim como os outros métodos espectrais tem como grande vantagem a sua alta precisão na solução de EDP's. Com a alta acurácia que este método oferece são necessários poucos pontos na malha para a obtenção de

soluções precisas. Para a aplicação do MEFo é usada a transformada discreta de Fourier, DFT, Eq. (1) e a transformada inversa, IDFT, Eq. (2).

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f_n \cdot \omega_N^{-nk}, \quad k = -\frac{N}{2}+1: \frac{N}{2} \quad (1)$$

$$f_n = \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} F_k \cdot \omega_N^{nk}, \quad n = -\frac{N-1}{2}: \frac{N-1}{2} \quad (2)$$

3 EQUAÇÃO DE BURGERS

Para que se possa aplicar e comparar tais métodos é necessário que se tenha uma EDP, que apresente uma solução analítica. Desta forma consegue-se obter o erro na aplicação de cada método. No presente trabalho escolheu-se a Equação de Burgers, Eq. 3.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3)$$

sendo que u é a velocidade de deslocamento do fluido em estudo, ν é a viscosidade cinemática do fluido, x é a variável deslocamento, e t é a variável tempo.

A Eq. 3 foi escolhida, pois apresenta solução analítica, Eq. 4, (Canuto et al., 2006) e além disso, se aproxima das equações de Navier-Stokes, com os termos de advecção e difusão de velocidade, apenas se diferenciando pela ausência do termo gradiente de pressão. A solução analítica utilizada no presente trabalho é ilustrada graficamente na Fig. (2).

$$u(x,t) = -2\nu \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}(x-ct, t+1)}{\phi(x-ct, t+1)} + c, \quad \phi(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-(2n+1)\pi)^2}{4\nu t}} \quad (4)$$

Figura 2. Solução analítica da Eq. 4, em $t=0$, proposta por Canuto et al., 2006.

Discretizando a equação de Burgers com o MDF e com o ME obtêm-se:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} (u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} u_i^n (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \quad (5)$$

Aplicando o MEFo na Equação de Burgers e usando o ME para o avanço temporal tem-se a resposta espectral, $\hat{u}$, dada pela Eq. (6) e desta obtêm-se a resposta no espaço físico por meio de uma IDFT, Eq. (2).

$$\hat{u}^{n+1} = \hat{u}^n - \Delta t \cdot \left[\nu \cdot k^2 \cdot \hat{u}^n - \hat{u}^n * (i \cdot k \cdot \hat{u}^n) \right] \quad (6)$$

Ao aplicar o MEFo na Equação de Burgers usando o MRK de quarta ordem para o avanço temporal obtêm-se os quatro subpassos e, por fim, a resposta espectral no tempo posterior, $\hat{u}^{n+1}$, o algoritmo utilizado no presente trabalho é dado pela Eq. 7, e desta obtêm-se a resposta no espaço físico por meio da Eq. (2).

$$\begin{aligned} \hat{k}_1 &= f(\hat{u}^n); \quad \hat{k}_2 = f\left(\hat{u}^n + \frac{\Delta t}{2} \hat{k}_1\right); \quad \hat{k}_3 = f\left(\hat{u}^n + \frac{\Delta t}{2} \hat{k}_2\right); \quad \hat{k}_4 = f(\hat{u}^n + \Delta t \hat{k}_3); \\ \hat{u}^{n+1} &= \hat{u}^n + \frac{\Delta t}{6} \cdot [\hat{k}_1 + 2 \cdot (\hat{k}_2 + \hat{k}_3) + \hat{k}_4]; \end{aligned} \quad (7)$$

4 RESULTADOS

Adotou-se para todas as simulações as mesmas características dadas em Canuto, et al. (2006), *i.e.*, a viscosidade cinemática do fluido igual a $\nu = 0,2 \text{ m}^2/\text{s}$; intervalo de tempo Δt , entre os cálculos

da velocidade, igual a $\pi/12800$ s; tempo final, em que são feitas as comparações com a solução analítica (Eq. 4) igual a $\pi/8$ s; e velocidade de fase c igual a $0,0$ m/s. Nas discretizações do domínio espacial para o Método de Diferenças Finitas utilizou-se números ímpares de nós que foram $N = 9, 17, 33, 65, 129, 257$ e 513 , e para os demais utilizou-se números pares de nós, $N = 8, 16, 32, 64, 128$ e 256 . Segue na Fig. (3a) um gráfico que mostra a solução analítica da Equação de Burgers e a solução numérica para o Método Espectral de Fourier utilizando o ME com vários níveis de discretização no tempo final ($t = \pi/8$ s), e na Fig. (3b) um gráfico que mostra o erro máximo para os métodos apresentados.

Figura 3. (a) Curvas de Burgers para o Método Espectral/Euler; (b) Erro máximo absoluto.

Pode-se observar pelo gráfico da Fig. (3b) que o método espectral apresenta melhor resultado que o Método de Diferenças Finitas. Além disso, constata-se que é o método espectral é mais bem aplicado quando utilizado com o método de Runge-Kutta para o avanço temporal, apresentando erros na casa dos 10^{-14} , revelando que este método é bastante eficiente na solução de problemas da Dinâmica dos Fluidos Computacional.

BIBLIOGRAFIA

- Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A., & Zang, T. A. (2006). *Spectral Methods Fundamentals in Single Domains*. New York: Springer-Verlag.
- Çengel, Y. A., & Cimbala, J. M. (2007). *Mecânica dos Fluidos: Fundamentos e Aplicações*. São Paulo: McGraw-Hill.
- Fortuna, A. d. (2000). *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos*. São Paulo: Edusp.
- Mariano, F. P. (2007). *Simulação de escoamentos não-periódicos utilizando as metodologias Pseudo-espectral de Fourier e da Fronteira imersa acopladas*. Uberlandia.