

Elementos de modelagem matemática e computacional na otimização estrutural de treliças planas em madeira considerando apenas efeitos de primeira ordem

Mathematical and computational modeling elements in the structural optimization of plane wood trusses considering first order effects only

DOI: 10.46814/lajdv4n3-037

Recebimento dos originais: 31/03/2022

Aceitação para publicação: 18/04/2022

Donald Mark Santee

Doutor em Engenharia Civil

Instituição: Universidade Federal de Catalão - UFCat

Endereço: Av. Dr. Lamartine Pinto de Avelar, 1120, Vila Chaud, CEP: 75704-020

E-mail: donaldsantee@ufcat.edu.br

Patrícia Aparecida Duarte Simões

Graduada em Matemática Industrial

Instituição: Universidade Federal de Catalão - UFCat

Endereço: Av. Dr. Lamartine Pinto de Avelar, 1120, Vila Chaud, CEP: 75704-020

E-mail: patriciadsimoes@hotmail.com

RESUMO

Usando o método dos nós, modelam-se duas treliças de cobertura de madeira onde se busca determinar a estrutura de menor volume possível que resista a um carregamento dado e que atenda à restrição de inclinação mínima do telhado. Para o dimensionamento das barras considera-se apenas o efeito da tração e da compressão (incluindo a flambagem) nas barras. Por ser o material mais comum nesse tipo de estrutura foram utilizados os critérios e valores da madeira. Ao final os dois casos de treliças são comparados. Na análise foi utilizado o “solver” do Matlab fmincon, com o algoritmo SQP.

Palavras-chave: otimização, madeira, treliça.

ABSTRACT

Using the method of knots, two wooden roof trusses are modeled where it is sought to determine the smallest possible volume structure that resists a given loading and meets the minimum roof pitch constraint. The design of the bars considers only the effect of tension and compression (including buckling) on the bars. Because it is the most common material in this type of structure, the criteria and values of wood were used. At the end the two truss cases are compared. The Matlab fmincon solver was used in the analysis, with the SQP algorithm.

Keywords: optimization, wood, truss.

1 INTRODUÇÃO

As empresas vêm buscando tomar decisões e investir em programas matemáticos para maximizar o seu retorno financeiro. Para melhorar este processo existem os procedimentos de

Otimização, onde são definidas as funções objetivo, que estão sujeitas ou não a restrições. No que envolve a Otimização encontra-se a Otimização Estrutural, que consiste em dispor das peças em uma estrutura de forma que esta seja capaz de suportar cargas com segurança, baixo custo e menor volume de material.

De modo geral, problemas de otimização têm a necessidade de identificar as variáveis de projeto, por situações em que se deseja maximizar ou minimizar uma função numérica de muitas variáveis, de modo a resolvê-las com o objetivo de representar seus problemas e suas restrições na busca da solução. Portanto, o emprego de sistemas de otimização conduz a um melhor entendimento no dimensionamento das estruturas, pois transforma o aspecto físico da estrutura em aspecto matemático, através de uma modelagem matemática da estrutura analisada (RIBEIRO,2008).

A estruturação do sistema treliçado permite que haja nas suas barras apenas esforços axiais (tração e compressão) e possua pequeno peso próprio, pois sua estrutura tem baixo consumo de material, sendo assim são muito utilizadas em coberturas, pontes, passarelas e equipamentos de elevação e transporte. O emprego da treliça também está relacionado à sua capacidade de vencer grandes vãos com consumo de material inferior ao que normalmente é necessário para outros sistemas estruturais, isso se deve ao fato que os elementos que compõem as treliças trabalham a esforços axiais. No caso do presente trabalho supõe-se que para que uma treliça se comporte de forma satisfatória, precisa respeitar algumas recomendações (PAIVA et al,2009):

- a) Todas as cargas precisam ser aplicadas nos nós;
- b) Os nós precisam ser perfeitamente articulados (nós ideais);
- c) Os eixos geométricos das extremidades das barras que compõem um nó precisam ser concorrentes.

2 AS CARACTERÍSTICAS FÍSICAS E MECÂNICAS DE PEÇAS DE MADEIRA

A madeira é um material com muitas variações, além disto, existem diversas espécies com diferentes propriedades. Sendo assim, é necessário o conhecimento de todas estas características para um melhor aproveitamento do material.

Segundo Pfeil,W; Pfeil,M(2003), os procedimentos para caracterização destas espécies de madeira e a definição destes parâmetros são apresentados nos anexos da Norma Brasileira para Projeto de Estruturas de Madeira, NBR 7190/97. De acordo com a NBR 7190, para a caracterização completa da madeira para uso em estruturas, as seguintes propriedades, dentre outras, devem ser determinadas experimentalmente:

Resistência a compressão paralela as fibras f_c ;

Resistência a tração paralela as fibras f_t ; e

Módulo de elasticidade na compressão normal às fibras, E_c ;

Neste trabalho serão consideradas as propriedades da madeira pinho-do-paraná, por ser a madeira mais utilizada nos exemplos da literatura. Assim:

$$f_c=40,9\text{MPa}$$

$$f_t=93,1\text{MPa}$$

$$E_c=15225\text{MPa}$$

Entretanto seguindo Pfeil,W; Pfeil,M(2003), com o objetivo de compensar variações naturais na madeira e na umidade, os valores utilizados para projetos foram reduzidos, em favor da segurança pelo critério da ABNT, para:

$$f_{cd}=0,28 f_c$$

$$E_{c,ef}=0,56 E_c$$

$$f_{td}=0,17 f_t$$

3 AS VARIÁVEIS DE PROJETO

Segundo Ribeiro (2008), para que a representação de um problema vise uma solução, é necessário que haja inicialmente a identificação das constantes e das variáveis de projetos, seus limites, e que a função objetivo seja definida. Neste trabalho a função objetivo de minimização depende das seguintes *constantes* de projeto:

E: espaçamento entre as treliças;

L: largura da cobertura; e

Propriedades físicas e mecânicas dos materiais.

E das seguintes *variáveis* de projeto:

H: altura da cobertura;

i: ângulo de inclinação das barras superiores da treliça;

A: área da seção transversal (considerada quadrada);

H_i, L_i : coordenada da posição dos nós.

Neste trabalho toda a treliça terá a mesma seção transversal, e as alturas serão consideradas variáveis contínuas.

4 A FUNÇÃO OBJETIVO

A função objetivo, dada pela equação 1 está relacionada ao modelo de treliça que consuma o menor volume de peças de madeira, para tanto, a equação define os parâmetros necessários os cálculos da função objetivo (RIBEIRO, 2008) é:

$$f = b^2 \sum_{i=1}^n l_i \quad (1)$$

Onde b é a largura (e a altura) de cada barra sendo todas as barras de mesma largura, l_i representa o comprimento da i -ésima barra da estrutura e n é o número total de barras. Como todas as barras tem mesma área, basta minimizar o comprimento total das barras da treliça.

5 OS CRITÉRIOS DE CÁLCULO

5.1 PARA PEÇAS TRACIONADAS

As peças solicitadas à tração simples são dimensionadas com a seção líquida de área A , de forma que a tensão solicitante de projeto seja menor que a tensão resistente à tração paralela às fibras f_{td} . A tensão resistente de projeto f_{td} é obtida a partir da resistência obtida de ensaios padronizados em corpos-de-prova isentos de defeitos (PFEIL,W; PFEIL,M.,2003).

$$N_d \leq f_{td}, \text{ onde } A = b_t^2$$

$$b_t = \sqrt{\frac{N_d}{f_{td}}} \quad (2)$$

5.2 PARA PEÇAS CURTAS COMPRIMIDAS

Peças Curtas (esmagamento)

Assim como no caso da tração simples, a tensão de projeto tem que ser menor que a tensão resistente, assim:

$$\frac{N_d}{A} \leq f_{cd}$$

Assim

$$b_c = \sqrt{\frac{N_d}{f_{cd}}} \quad (3)$$

5.3 PARA PEÇAS ESBELTAS COMPRIMIDAS (FLAMBAGEM)

Peças comprimidas de madeira estão sujeitas ao fenômeno da flambagem [Pfeil,W; Pfeil,M.,2003], proporcionada por esbeltezes significativas, assim, dependendo da esbeltez de uma peça, sua instabilidade geométrica pode ser muito intensa, levando a valores de resistência axial muito baixa para as peças comprimidas. Neste caso a força solicitante tem que ser menor que a carga de flambagem, assim:

$$N_d < N_{cr} = \frac{\pi^2 E_c I}{l^2} \text{ (CargacríticadeEuler)} \quad (4)$$

$$I = \frac{N_d l^2}{\pi^2 E_c} \rightarrow \frac{b^4}{12} = \frac{N_d l^2}{\pi^2 E_c}$$

$$b_f = \sqrt[4]{\frac{12 l^2 N_d}{\pi^2 E_c}} \quad (5)$$

Logo a largura e altura da seção transversal necessária será o caso mais desfavorável.

$$b = \text{maior}(b_f, b_c)$$

6 O MÉTODO DE CÁLCULO

Resolver uma treliça simples é determinar as reações de seus apoios e as forças que atuam em suas barras. O método dos nós será utilizado para calcular as forças em cada uma das barras da estrutura. Segundo Moliterno (2010), por este método analisa-se nó por nó, partindo-se do princípio: “Se o conjunto está em equilíbrio, os nós também estarão em equilíbrio”.

São válidas as equações de equilíbrio da estática:

$$\sum V = 0 \text{ (somatório das forças verticais)}$$

$$\sum H = 0 \text{ (somatório das forças horizontais)}$$

$$\sum M = 0 \text{ (somatório das forças de momento)}$$

Usando esse método são estudados, a seguir, dois casos de treliça: uma de três barras e uma com nove barras.

7 OS DOIS CASOS DE TRELIÇA

7.1 CASO1 – TRELIÇA DE TRÊS BARRAS

Deseja-se resolver a treliça da figura 1:

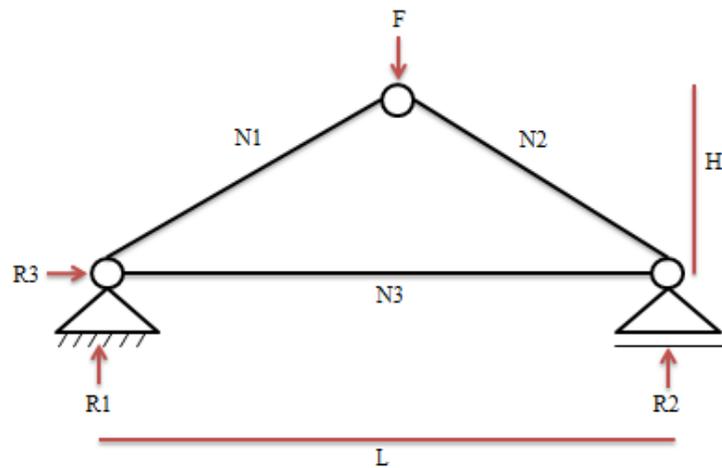
- a) Cálculo das forças existentes em cada um dos apoios:

$$\sum V = R_1 + R_2 = F \rightarrow R_1 = \frac{F}{2}$$

$$\sum M = R_2 L - \frac{L}{2} F = 0 \rightarrow R_2 = \frac{F}{2}$$

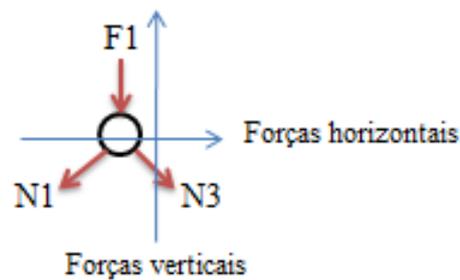
Como não se tem forças aplicadas horizontalmente tem-se que: $R_3=0$.

Figura 1: Trelça de três barras



b) Cálculo das forças aplicadas a cada nó da trelça:

Figura 2: Forças no primeiro nó



Equilíbrio do 1º nó :

$$\sum H = -N_1 \cos\theta + N_2 \cos\theta = 0$$

$$N_1 = N_2$$

$$\sum V = -F - N_1 \sin\theta - N_2 \sin\theta = 0$$

(6)

$$N_1 \sin\theta + N_2 \sin\theta = -F$$

Substituindo a igualdade (6), tem-se:

$$N_1 = N_2 = \frac{-F}{2 \sin\theta}$$

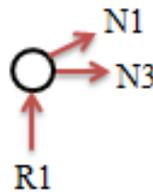
$$st = \sin\theta = \frac{H}{\sqrt{H^2 + \frac{L_2}{2}}} = \frac{H}{l}$$

onde: l é o comprimento das barras 1 e 2.

$$ct = \cos\theta = \frac{L_2}{l}$$

Equilíbrio do 2º nó :

Figura 3: Forças no segundo nó



$$\sum H = N_1 \cos\theta + N_3 = 0$$

$$N_3 = -N_1 \cos\theta$$

A partir do conhecimento das forças nas barras N_1 , N_2 e N_3 pode-se determinar as dimensões da seção transversal das mesmas.

Caso as barras estejam comprimidas como segue para as barras 1 e 2, tem-se que:

$$b_f = \sqrt{\sqrt{\frac{12l(-N_1)}{\pi^2 E_c}}}$$

$$b_c = \sqrt{\frac{(-N_1)}{f_c}}$$

$$b_1 = \text{maior}(b_f, b_c)$$

$$b_2 = b_1$$

Caso em que a barra está tracionada como para a barra 3, temos que:

$$b_3 = \sqrt{\frac{N_3}{f_t}}$$

Assim, temos que o volume da treliça que é a função objetivo, será representado pela equação:

$$V = b_1^2 ll + b_2^2 ll + b_3^2 L \tag{7}$$

A restrição desse modelo será a inclinação mínima do telhado (*i*), que segundo a TOPTELHA é dada pela fórmula:

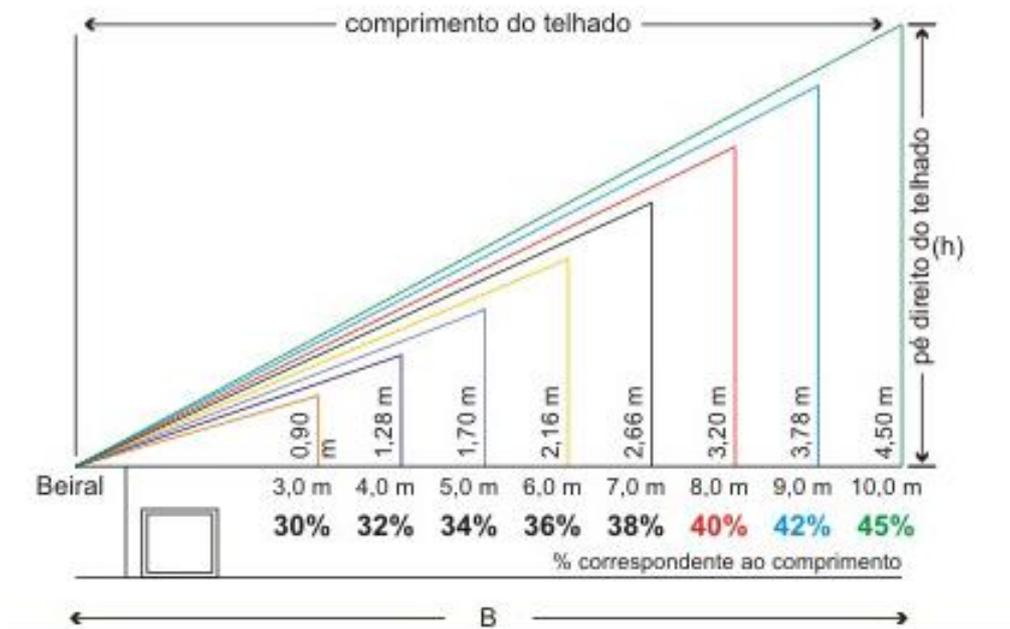
$$i_{min} = \begin{cases} 30; & L \leq 3m \\ 30 + 2(L - 3); & 3 < L < 9m \\ 42 + 3(L - 9); & \geq 9m \end{cases}$$

$$i = \frac{H * 100}{L}$$

Sendo assim a restrição pode ser escrita como:

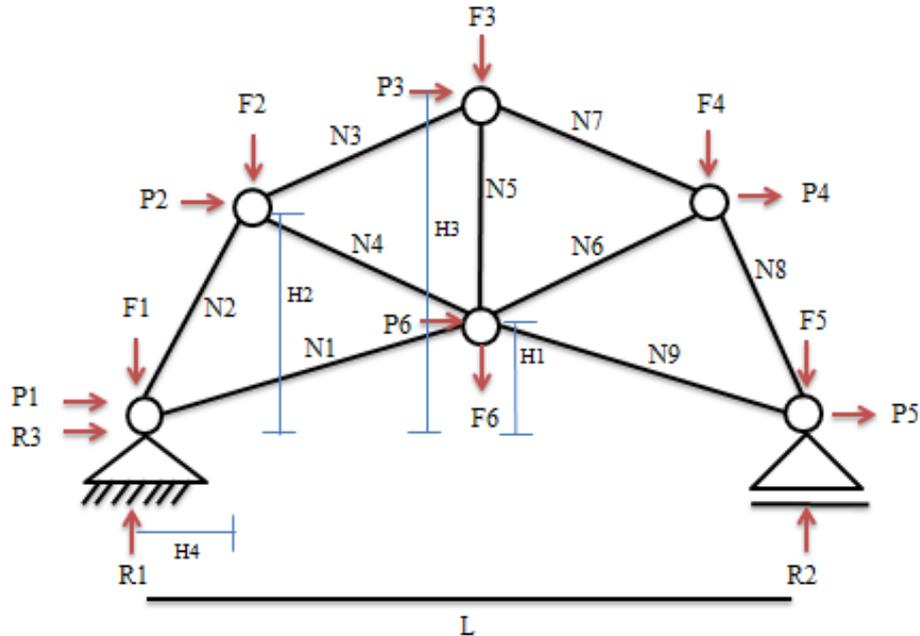
$$i - i_{min} \geq 0.$$

Figura 4: Inclinação mínima do telhado



7.2 CASO 2 – TRELIÇA DE NOVE BARRAS

Figura 5: Treliza de nove barras



a) Cálculo das reações de apoio:

$$\sum H = P_1 + P_2 + \dots + P_6 + R_3 = 0 \rightarrow R_3 = -(P_1 + \dots + P_6)$$

$$\sum V = R_1 + R_2 - F_1 - \dots - F_6 = 0$$

$$\sum V = R_1 + R_2 = F_1 + \dots + F_6 \rightarrow R_1 = F_1 + \dots + F_6 - R_2$$

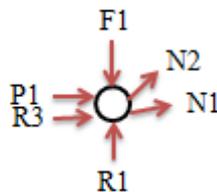
$$\sum M = R_2 L - F_2 H_4 - P_2 H_2 - F_3 \left(\frac{L}{2}\right) - P_3 H_3 - F_4 L - H_4 - P_4 H_2 - P_5 L = 0$$

$$\sum M = R_2 = \frac{1}{L} \left[F_2 H_4 + P_2 H_2 + F_3 \left(\frac{L}{2}\right) + P_3 H_3 + F_4 (L - H_4) + P_4 H_2 + F_5 L \right]$$

b) Cálculo das forças sobre cada nó:

Equilíbrio do nó 1:

Figura 6: Forças no primeiro nó



$$\sum H = 0 \rightarrow \cos\theta_1 N_1 + \cos\theta_2 N_2 = -R_3 - P_1 \quad (8)$$

$$\sum V = 0 \rightarrow \sin\theta_1 N_1 + \sin\theta_2 N_2 = F_1 - R_1 \quad (9)$$

Sendo:

$$\cos\theta_1 = \frac{L}{2l_1}$$

$$\sin\theta_1 = \frac{H_1}{l_1}$$

$$l_1 = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + H_1^2}$$

Onde l_1 é o comprimento da barra 1.

$$l_2 = \sqrt{H_4^2 + H_2^2}$$

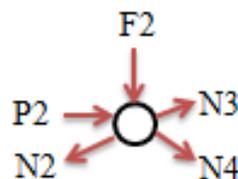
Onde l_2 é o comprimento da barra 2.

$$\cos\theta_2 = \frac{H_4}{l_2}$$

$$\sin\theta_2 = \frac{H_2}{l_2}$$

Equilíbrio do nó 2:

Figura 7: Forças no segundo nó



$$\sum H = 0 \rightarrow -\cos\theta_2 N_2 + \cos\theta_3 N_3 + \cos\theta_4 N_4 = -P_2 \quad (10)$$

$$\sum V = 0 \rightarrow -\sin\theta_2 N_2 + \sin\theta_3 N_3 - \sin\theta_4 N_4 = F_2 \quad (11)$$

$$l_3 = \sqrt{\left(\frac{L}{2} - H_4\right)^2 + (H_3 - H_2)^2}$$

Onde l_3 é o comprimento da barra 3.

$$l_4 = \sqrt{\left(\frac{L}{2} - H_4\right)^2 + (H_2 - H_1)^2}$$

Onde l_4 é o comprimento da barra 4.

Sendo:

$$\cos\theta_3 = \frac{\frac{L}{2} - H_4}{l_3}$$

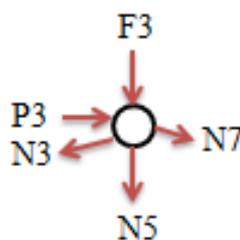
$$\sin\theta_3 = \frac{H_3 - H_2}{l_3}$$

$$\cos\theta_4 = \frac{\frac{L}{2} - H_4}{l_4}$$

$$\sin\theta_4 = \frac{H_2 - H_1}{l_4}$$

Equilíbrio do nó 3:

Figura 8: Forças no terceiro nó

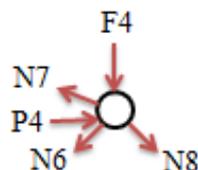


$$\sum H = 0 \rightarrow N_3 \cos\theta_3 + N_7 \cos\theta_3 = -P_3 \quad (12)$$

$$\sum V = 0 \rightarrow -N_5 - N_3 \sin\theta_3 - N_7 \sin\theta_3 = F_3 \quad (13)$$

Equilíbrio do nó 4:

Figura 9: Forças no quarto nó

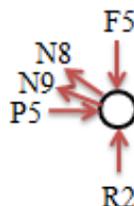


$$\sum H = 0 \rightarrow -N_6 \cos \theta_4 - N_7 \cos \theta_3 - N_8 \cos \theta_2 = -P_4 \quad (14)$$

$$\sum V = 0 \rightarrow -N_6 \sin \theta_4 + N_7 \sin \theta_3 - N_8 \sin \theta_2 = F_4 \quad (15)$$

Equilíbrio do nó 5:

Figura 10: Forças no quinto nó



$$\sum H = 0 \rightarrow -N_8 \cos \theta_2 - N_9 \cos \theta_1 = -P_5 \quad (16)$$

Foi considerado neste trabalho, que esta treliça é simétrica por isso não houve necessidade de calcular todos os nós. As equações de (8) a (16) formam um sistema linear cuja solução fornece os valores das forças nos nós.

Restrições:

$$i_1 = \frac{H_2 * 100}{H_4} > i_{min}$$

$$i_2 = \frac{(H_3 - H_2) * 100}{\frac{L}{2} - H_4} > i_{min}$$

8 FORÇAS SOLICITANTES

Foi utilizada a telha de barro tipo francesa, segundo o *site* da “FazFácil Reforma e Construção”, tem-se 16 telhas/m² com peso por peça de 2,6 kg/telha o que dá um peso de 41,6k/m². Será utilizado nos exemplos um peso de 50 kg/m².

Considerou-se um espaçamento entre as treliças constante de $E = 3m$ e um peso adicional de $1500 N$ representando o peso de uma pessoa sobre o telhado, assim tem-se que:

$$F_4 = F_2 = E * \frac{L}{4} * 50 * 9,8$$

$$F_3 = E * \left(\frac{L}{2} - H_4\right) * 50 * 9,8 + peso$$

9 RESULTADOS

A função objetivo e as restrições foram programadas no Matlab e foi utilizado o solver fmincon com o algoritmo SQP.

Para o Caso 1, encontrou-se:

$L(m)$	H otimizado(m)	$F(N)$	$b(m)$
3	1,021	3705	0.0427
4	1,353	4440	0.0472
5	1,7*	5175	0.0520
6	2,16*	5910	0.0572
7	2,66*	6645	0.0627
8	3,2*	7380	0.0684
9	3,78*	8115	0.0743

* Inclinação mínima.

Para coberturas de vãos maiores, o que determina a treliça de menor volume é a treliça de menor inclinação permitida. A tabela abaixo mostra que esse comportamento independe do peso aplicado à treliça.

peso(N)	H otimizado(m)
0	1,7
250	1,7
500	1,7
750	1,7
1000	1,7
1250	1,7
1500	1,7

Por mais que aumente a força, o que determina a altura ótima é a restrição.

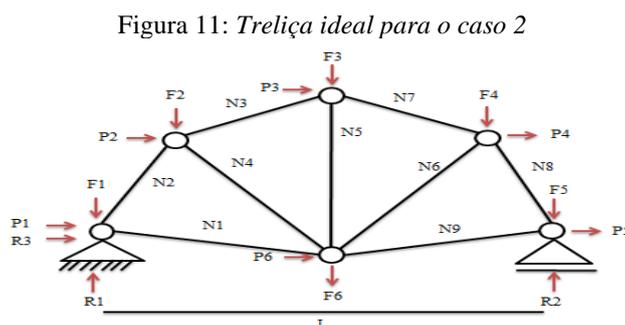
Para o Caso 2, encontrou-se:

L	H1, H2,H3,H4 otim					F1, F2,F3,F4,F5,F6				
3	-0,373	0,224	0,464	0,699	0	1102	2235	1102	0	0
4	-0,494	0,298	0,642	0,924	0	1470	2970	1470	0	0
5	-0,592	0,391	0,85	1,149	0	1837	3705	1837	0	0
6 *	-0,675	0,494	1,08	1,373	0	2205	4440	2205	0	0
7*	-0,746	0,607	1,33	1,597	0	2572	5175	2572	0	0
8 *	-0,806	0,728	1,6	1,82	0	2940	5910	2940	0	0
9*	-0,856	0,858	1,89	2,044	0	3307	6645	3307	0	0

* Inclinação mínima

Para coberturas de vão maiores, o que determina a treliça de menor volume é a treliça de menor inclinação permitida.

Observando os resultados da tabela acima vemos que a treliça apresentada inicialmente no caso 2, não é o modelo apropriado quando se deseja uma treliça que consuma menor volume de material. A figura abaixo mostra o modelo ideal para o resultado encontrado.



10 CONCLUSÃO

Comparando os casos 1 e 2, calculando os volumes encontrados em cada caso, tem-se:

Volume(m ³)	Treliça 1	Treliça 2
L(m)		
3	0.1103	0.2199
5	0.2622	0.5207
7	0.4708	0.9281
9	0.7375	1.4378

Observando o resultado da tabela acima, podemos concluir que treliças mais simples (menos barras) são mais econômicas, utilizam um menor volume de material.

Entretanto é importante observar que foram levadas em consideração que as barras estão sujeitas apenas a esforços axiais. No caso de treliças com uma quantidade menor de barras, haverá a necessidade de se apoiarem os caibros ao longo das barras superiores, introduzindo assim forças de flexão. A introdução na modelagem das forças de flexão será apreciada em um trabalho futuro, em andamento.

REFERÊNCIAS

- [1] Knuth, Sergio; Silva, Carlos M. **Modelo de Apresentação**, demais dados, 1995. Disponível em catalogo.ufg.br/mat. Acesso em: 03 de março de 2009.
- [1] Associação Brasileira de Normas Técnicas. **NBR 7190:Projetos de estrutura de madeira**. Rio de Janeiro. Brasil (1997).
- [2] BEER, Ferdinand P.,JOHNSTON, JR, E. Resistencia dos Materiais. 3, ed. São Paulo: Mahron Boohs do Brasil LTDA, 1996.
- [3] Inclinação do Telhado. Disponível em: http://www.toptelha.com.br/inclinacao_telhado.php> Acesso em 08-11-2013.
- [4] MOLITERNO,A. **Caderno de projetos de telhados em estruturas de madeira** .4, ed. São Paulo: Blucher, 2010.
- [5] PAIVA, A. P. O. de et al. **Análise teórica e experimental das treliças planas: determinação da influência de imperfeições construtivas no comportamento estrutural**. Pernambuco, 2009. Cobenge.
- [6] PFEIL, W; PFEIL, M. Estruturas de madeira. 6, ed. Rio de Janeiro: LTC,2003.
- [7] RIBEIRO, L. M. P. Otimização e dimensionamento de treliças planas de madeira empregando o método dos algoritmos genéticos. 2008. 103 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil)-FECIV/UFU, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2008.
- [8] Telhas cerâmicas...tipos e quantidades!. Disponível em <http://www.fazfacil.com.br/reforma-construcao/telha-ceramica-tipo-quantidade/>> Acesso em 15-11-2013.